MAT301 DİFERANSİYEL GEOMETRİ I DERSİ FİNAL SINAVI SORULARI

09.01.2020

SORU1: Boşlukları tamamlayınız:

Bir nokta ve vektörden oluşan ikiliye .... denir.

Her noktaya kotanjant vektör karşılık getiren fonksiyona......................denir.

$\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ olan eğriye ....eğri denir.

Bir $\alpha \subset E^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğetinin ve binormalinin oluşturduğu düzleme ....düzlem denir.

Karşılıklı noktalarındaki teğet vektörleri birbirine dik olan eğri çiftine...................eğri çifti denir. **(25 puan)**

SORU2: $f(x,y,z) = 2xz + x^2 + y^3 + 3,\ \vec{v} = (-1,1,0) \in IR^3$ ve $P = (1,1,0) \in E^3$ için $\overrightarrow{v_p}[f] = ?$ **(10 puan)**

SORU3: $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2x_2 - x_1x_2x_3$ ve $P = (1,2,3) \in E^3$ için $\operatorname{grad} f_P = ?$ **(10 puan)**

SORU4: Düzlemde verilen $\alpha(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ eğrisinin eğriliğini bulunuz. **(15 puan)**

SORU5: $\alpha(t) = (2t, t^2, t^3/3)$ eğrisinin $t = 1$ noktasındaki hız vektörünü hesaplayınız. **(10 puan)**

SORU6: $\alpha(t) = (e^t, 2e^t, 3e^t)$ eğrisinin $\alpha(0)$ ve $\alpha(1)$ noktaları arasındaki yayının uzunluğunu hesaplayınız. **(10 puan)**

SORU7: E^3 de verilen bir eğrinin eğrilik ve burulması ne ifade eder? **(10 puan)**

SORU8: Yay parametreli bir eğrinin helis eğrisi (eğilim çizgisi) olup olmadığını nasıl anlarsınız? **(10 puan)**

SORU9: Bertrand eğri çiftlerinin karşılıklı noktalarındaki birim teğet vektörleri arasındaki açının sabit olduğunu gösteriniz. **(15 puan)**

Süre 110 dakikadır.

Prof. Dr. Emin KASAP

CEVAP ANAHTARI

1) * Bir nokta ve vektörden oluşan ikiliye tanjant vektör denir.

* Her noktaya kotangant vektör karşılık getiren fonksiyona 1-form denir.

* $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\|=1$ olan eğriye birim hızlı eğri veya yay-parametreli eğri denir.

* Bir $\alpha \subset E^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğetinin ve binormalinin oluşturduğu düzleme rektifiyan düzlem denir.

* Karşılıklı noktalarındaki teğet vektörleri birbirine dik olan eğri çiftine involüt-evolüt eğri çifti denir.

---

2) $f(x,y,z) = 2xz + x^2 + y^3 + 3$, $\vec{v} = (-1,1,0)$, $P = (1,1,0)$

$$\vec{v}_P[f] = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_P + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_P + v_3 \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_P$$

$$= (-1).(2z+2x)\Big|_P + 1 . 3y^2\Big|_P$$

$$= (-1)(2P_3 + 2P_1) + 3P_2^2$$

$$= 1$$

---

3) $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 x_2 - x_1 x_2 x_3$, $P = (1,2,3)$

$$\operatorname{grad} f\Big|_P = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_P , \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_P , \frac{\partial f}{\partial x_3}\Big|_P \right)$$

$$= \left((4x_1x_2 - x_2x_3)\Big|_P , (2x_1^2 - x_1x_3)\Big|_P , (-x_1x_2)_P \right)$$

$$= \left(4P_1P_2 - P_2P_3 , 2P_1^2 - P_1P_3 , -P_1P_2 \right)$$

$$= (2,1,-2)$$

4) $\alpha(t)=(2\cos t, 2\sin t)$, $\alpha'(t)=(-2\sin t, 2\cos t)$

$\Rightarrow \|\alpha'(t)\| = 2 \neq 1$ olup t herhangi parametredir.

$x(t)=2\cos t$, $y(t)=2\sin t$ olmak üzere

$$\kappa = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{3/2}} \quad \text{dir.}$$

$$\frac{dx}{dt}=-2\sin t,\quad \frac{d^2x}{dt^2}=-2\cos t,\quad \frac{dy}{dt}=2\cos t,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-2\sin t$$

değerleri yerine yazılırsa

$$\kappa = \frac{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}{(4\sin^2 t + 4\cos^2 t)^{3/2}} = \frac{1}{2} \quad \text{bulunur.}$$

---

5) $\alpha(t)=(2t, t^2, t^3/3)$ için $\alpha'(t)=(2, 2t, t^2)$

$t=1$ için $\alpha'(1)=(2,2,1)$ bulunur.

---

6) $\alpha(t)=(e^t, 2e^t, 3e^t)$ için $\alpha'(t)=(e^t, 2e^t, 3e^t)$

$\Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{e^{2t}+4e^{2t}+9e^{2t}} = \sqrt{14}\,e^t$ bulunur.

$$s=\int_0^1 \|\alpha'(t)\|\,dt = \int_0^1 \sqrt{14}\,e^t\,dt = \sqrt{14}\,e^t\Big|_0^1 = \sqrt{14}(e-1) \quad \text{olur.}$$

---

7) Bir eğrinin eğriliği, onun doğrudan ne kadar saptığının yani ne kadar eğrildiğinin bir ölçüsüdür. Eğriliği sıfır olan eğri bir doğrudur. Eğrilik ne kadar büyük olursa eğri o kadar çok eğrilmiştir.

Bir eğrinin burulması, onun düzlemden ne kadar saptığının bir ölçüsüdür. Burulması sıfır olan eğri düzlem eğrisidir.

8) Eğrinin eğriliği κ, burulması da τ olmak üzere $\frac{\tau}{\kappa}$ oranı sabit ise eğri helis eğrisidir. Ayrıca, $\det(\alpha''(s), \alpha'''(s), \alpha^{IV}(s)) = 0$ olması da eğrinin helis olması demektir.

---

9) M eğrisi (I, α) ve N eğrisi de (I, β) koordinat komşulukları ile verilsin. $s \in I$, M nin $s^* \in I$ da N nin yay parametresi olsun. M nin $\alpha(s) \in M$ deki Frenet 3-ayaklısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve N nin de $\beta(s) \in N$ deki Frenet 3-ayaklısı $\{T^*(s), N^*(s), B^*(s)\}$ olarak verilsin. (M,N) Bertrand eğri çifti ise $N = \mp N^*$ dır.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\langle T(s), T^*(s)\rangle &= \left\langle \frac{dT}{ds}, T^* \right\rangle + \left\langle T, \frac{dT^*}{ds} \right\rangle \\
&= \langle \kappa N, T^* \rangle + \left\langle T, \frac{dT^*}{ds^*}\cdot\frac{ds^*}{ds} \right\rangle \\
&= \kappa\langle N, T^* \rangle + \left\langle T, \kappa^* N^* \frac{ds^*}{ds} \right\rangle \\
&= \kappa \underbrace{\langle \underset{\mp N^*}{N}, T^* \rangle}_{0} + \kappa^* \frac{ds^*}{ds} \underbrace{\langle T, \underset{\mp N}{N^*} \rangle}_{0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \langle T(s), T^*(s) \rangle = \cos\theta = \text{sabit}$

$\Rightarrow \theta = \text{sabit}.$